中国科学 A 辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 8 期: 913～929
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

差分-微分模上的 Gröbner 基及差分-微分维数多项式

周梦 ①*, Winkler F ②

① 北京航空航天大学数学系, 北京 100080;
② RISC-Linz, J. Kepler University Linz, A-4040 Linz, Austria
* E-mail: zhoumeng1613@hotmail.com

收稿日期: 2007-05-04; 接受日期: 2008-02-22
国家自然科学基金 (批准号: 60473019) 和中国科学院数学机械化重点实验室资助项目

摘要 通过引入广义单项式序把 Gröbner 基理论拓展到差分-微分模上, 构造和证明了差分-微分模上 Gröbner 基算法. 然后利用差分-微分模上的 Gröbner 基构造了线性差分-微分方程系的维数多项式算法.

关键词 Gröbner 基 广义单项式序 差分-微分模 差分-微分维数多项式

MSC(2000) 主题分类 12-04, 47C05

1 引言

经典 Gröbner 基方法对于解决多项式代数中各种问题发挥了很大效力. 由 Buchberger[1] 给出的经典 Gröbner 基方法已经被许多研究者推广到各种非交换情形 (参见文献 [1–7]). 它已经成为研究线性偏微分方程系的各种算法问题的有力工具. 然而对于线性差分-微分混合方程系统, 已有的建立在 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$ 或 $\mathbb{N}^n$ 单项式序上的 Gröbner 基理论不能直接应用. Pauer 和 Unterkircher [8] 考虑了 Laurent 多项式环上的 Gröbner 基, 但仅限于交换的情形. Levin[9] 对于差分-微分算子环上的自由模引入了特征集概念, 但其使用的是一种特殊的序而不是一般单项式序.

微分维数多项式概念由 Kolchin[10] 作为微分域扩张的维数描述而引入. Johnson[11] 证明了微分域扩张的微分维数多项式与一个微分滤模的 Hilbert 多项式是一致的. 这一结果使得利用 Gröbner 基技术计算微分维数多项式成为可能. 从那以后各种涉及微分维数多项式的微分代数问题被深入研究 (参见文献 [12, 13]). 差分维数多项式和差分-微分维数多项式分别由 Levin[14], Mikhalev 和 Pankratev[15] 引入. 它们在差分代数和差分-微分代数中所起的作用与 Hilbert 多项式在多项式代数 (或微分维数多项式在微分代数) 中的作用类似. 差分-微分维数多项式用于研究差分-微分域扩张的维数理论和差分-微分代数系统的维数理论. Mikhalev 和 Pankratev[15] 用经典 Gröbner 基方法间接证明了差分-微分维数多项式的存在性. Wu[16]

也用导出序方法计算了一些线性差分-微分方程系的维数. 然而对于微分部分和差分部分的分别维数描述, 这一方法不再有效.

本文提出一种新的差分-微分 Gröbner 基方法以计算差分-微分维数多项式.

在本文中 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_-$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别表示整数集、非负整数集、非正整数集和有理数集. 环指有单位元的结合环. 环 A 上的模指幺作用左 A 模.

定义 1.1 设 R 为交换 noetherian 环, $\Delta=\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$ 和 $\sigma=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 分别是 R 上的一个导子集和一个自同构集, 使得 $\beta(x)\in R$ 和 $\beta(\gamma(x))=\gamma(\beta(x))$ 对一切 $\beta,\gamma\in\Delta\cup\sigma$ 和 $x\in R$ 成立, 则称 R 为一个差分-微分环, 或简称为 Δ-σ-环. 若 R 为域, 则称 R 为一个差分-微分域, 或简称为 Δ-σ-域.

若 R 是一个 Δ-σ-环, 以 Λ 记所有形如

$$\lambda=\delta_1^{k_1}\cdots\delta_m^{k_m}\alpha_1^{l_1}\cdots\alpha_n^{l_n} \tag{1.1}$$

的元素组成的交换半群, 其中 $(k_1,\dots,k_m)\in\mathbb{N}^m$, $(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{Z}^n$. 这个半群包含了由集合 Δ 生成的自由交换半群 Θ 和由集合 σ 生成的自由交换半群 Γ. Λ 的子集 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n^{-1}\}$ 记为 σ^*.

定义 1.2 设 R 为一个 Δ-σ-环. 形如

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\lambda \tag{1.2}$$

的元素称为 R 上的差分-微分算子 (或简称为 Δ-σ-算子), 其中 $a_\lambda\in R$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 成立, 且只有有限多个 a_λ 异于零. 两个 Δ-σ-算子 $\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\lambda$ 和 $\sum_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda\lambda$ 相等当且仅当 $a_\lambda=b_\lambda$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 成立.

R 上的所有 Δ-σ-算子所成集合是一个环, 基本算律为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\lambda+\sum_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda+b_\lambda)\lambda,\\
&a\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\lambda\Big)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(aa_\lambda)\lambda,\\
&\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\lambda\Big)\mu=\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda(\lambda\mu),\\
&\delta a=a\delta+\delta(a),\qquad \tau a=\tau(a)\tau,
\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中 $a_\lambda,b_\lambda\in R$, $\lambda,\mu\in\Lambda$, $a\in R$, $\delta\in\Delta$, $\tau\in\sigma^*$. 注意其中的 "项" $\lambda\in\Lambda$ 不能与系数 $a_\lambda\in R$ 交换.

定义 1.3 R 上所有 Δ-σ-算子所成的环记为 D, 称为 R 上的差分-微分算子环 (或 Δ-σ-算子环). 一个左 D-模 M 称为一个差分-微分模 (或 Δ-σ-模). 若 M 作为 D-模是有限生成的, 则称为有限生成差分-微分模.

若 $\sigma=\emptyset$, 则 D 是微分算子环 $R[\delta_1,\dots,\delta_m]$, 若系数环 R 还是域上的多项式环, 则 D 是 Weyl 代数 A_m, 故 Δ-σ-模是微分算子环上模的拓广. 但在 Δ-σ-算子环中, "单项式" 形如 (1.1) 式, 其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 的指数为 $(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{Z}^n$, 从而经典的单项式序不再可用. 下面将单项式序的概念予以推广.

2 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 上的广义单项式序

定义 2.1 设 $\mathbb{Z}^n$ 是有限多个子集 $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 的并,

$$\mathbb{Z}^n = \bigcup_{j=1}^{k} \mathbb{Z}_j^{(n)},$$

其中 $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ $(j = 1, \ldots, k)$ 满足下列条件:

(i) $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_j^{(n)}$, 且 $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 不包含任何一对可逆元 $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ 和 $c^{-1} = (-c_1, \ldots, -c_n)$,

(ii) $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 是有限生成的 $\mathbb{Z}^n$ 子半群,

(iii) $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 生成的群是整个 $\mathbb{Z}^n$,

则称 $\{\mathbb{Z}_j^{(n)},\ j = 1, \ldots, k\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个轨道分解, $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 称为这个分解的第 j 轨道.

例 2.2 取 $\{\mathbb{Z}_1^{(n)}, \ldots, \mathbb{Z}_{2^n}^{(n)}\}$ 为所有不同的由 n 个集合作成的 Descartes 积, 这些集合的每一个或者是 $\mathbb{N}$, 或者是 $\mathbb{Z}_-$, 则 $\{\mathbb{Z}_1^{(n)}, \ldots, \mathbb{Z}_{2^n}^{(n)}\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个轨道分解. 每个轨道作为半群的生成元集是

$$\{(c_1, 0, \ldots, 0), (0, c_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, c_n)\},$$

其中 c_i 是 1 或 -1, $i = 1, \ldots, n$. 我们称这个分解为 $\mathbb{Z}^n$ 的正则轨道分解.

例 2.3 取 $\mathbb{Z}_0^{(n)}$ 为由

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$$

生成的 $\mathbb{Z}^n$ 的子半群, $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 为由

$$\{(-1, \ldots, -1)\} \bigcup \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\} \backslash \{(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)\},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

生成的 $\mathbb{Z}^n$ 的子半群, 则 $\{\mathbb{Z}_0^{(n)}, \mathbb{Z}_1^{(n)}, \ldots, \mathbb{Z}_n^{(n)}\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个轨道分解. 当 $n = 2$ 时, 这个轨道分解为

$$\mathbb{Z}_0^{(n)} = \{(a, b) | a \geqslant 0, b \geqslant 0, a, b \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{Z}_1^{(n)} = \{(a, b) | a \leqslant 0, b \geqslant a, a, b \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{Z}_2^{(n)} = \{(a, b) | b \leqslant 0, a \geqslant b, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

定义 2.4 设 $\{\mathbb{Z}_j^{(n)}, j = 1, \ldots, k\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的轨道分解. $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 中两个元素 $a = (k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_n)$ 和 $b = (r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_n)$ 称为相似的, 如果 $(l_1, \ldots, l_n)$ 和 $(s_1, \ldots, s_n)$ 在同一个轨道中.

定义 2.5 设 $\{\mathbb{Z}_j^{(n)}, j = 1, \ldots, k\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个轨道分解. $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 上的一个全序 $\prec$ 称为相对于这个轨道分解的广义单项式序, 如果

(i) $(0, \ldots, 0)$ 是 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 的最小元,

(ii) 若 $a \prec b$, 则对任何与 b 相似的 c, 有 $a + c \prec b + c$. 其中 $a, b, c \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$.

注 定义 2.5 的条件 (ii) 意味着广义单项式序在每一个轨道内是单项式序.

例 2.6 取 $\mathbb{Z}^n$ 的正则轨道分解如例 2.2. 对每个 $a=(k_1,\cdots,k_m,l_1,\cdots,l_n)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, 令

$$|a|=k_1+\ldots+k_m+|l_1|+\ldots+|l_n|.$$

设 $a=(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)$, $b=(r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, 定义 $a\prec b$ 当 $(|a|,k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)$ 按字典序小于 $(|b|,r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n)$, 则 "$\prec$" 是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 上的广义单项式序.

例 2.7 取 $\mathbb{Z}^n$ 的正则轨道分解. 对每个 $a=(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, 令

$$|a|_1=\sum_{j=1}^{m}k_j,\qquad |a|_2=\sum_{j=1}^{n}|l_j|.$$

设 $a=(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)$, $b=(r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, 定义 $a\prec b$ 当

$$(|a|_1,|a|_2,k_1,\ldots,k_m,|l_1|,\ldots,|l_n|,l_1,\ldots,l_n)$$

按字典序小于

$$(|b|_1,|b|_2,r_1,\ldots,r_m,|s_1|,\ldots,|s_n|,s_1,\ldots,s_n).$$

则 "$\prec$" 是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 上的广义单项式序.

例 2.8 取 $\mathbb{Z}^n$ 的轨道分解如例 2.3. 对每个 $a=(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, 令

$$\|a\|=-\min\{0,l_1,\ldots,l_n\}.$$

设 $a=(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)$, $b=(r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, 定义 $a\prec b$ 当 $(\|a\|,k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)$ 按字典序小于 $(\|b\|,r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n)$, 则 "$\prec$" 是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 上的广义单项式序.

为考察 Δ-σ-模, 需要把广义单项式序概念拓展到集合 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$ 上. 其中 $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$ 是模的生成元集.

定义 2.9 设 $\{\mathbb{Z}_j^{(n)},\ j=1,\ldots,2^n\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的轨道分解, $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$ 是 q 个不同元素的集合. $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$ 上的一个全序 $\prec$ 称为 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$ 上的广义单项式序, 如果

(i) $(0,\ldots,0)$ 是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times\{e_i\}$ $(e_i\in E)$ 的最小元,

(ii) 若 $(a,e_i)\prec(b,e_j)$, 则对任意与 b 相似的 c, 有 $(a+c,e_i)\prec(b+c,e_j)$. 其中 $a,b,c\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$, $e_i,e_j\in E$.

存在多种把 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 上的广义单项式序拓展到集合 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$ 上的方法. 也可以在 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$ 上直接定义.

例 2.10 取 $\mathbb{Z}^n$ 的轨道分解和广义单项式序如例 2.7. 给定 $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$ 上的一个序 "$\prec'$". 设 $(a,e_i)=(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n,e_i)$, $(b,e_j)=(r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n,e_j)\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$, 定义

$$(a,e_i)\prec_1(b,e_j)\Longleftrightarrow a\prec b\quad\text{或}\quad(a=b\ \text{和}\ e_i\prec' e_j);$$

$$(a,e_i)\prec_2(b,e_j)\Longleftrightarrow e_i\prec' e_j\quad\text{或}\quad(e_i=e_j\ \text{和}\ a\prec b);$$

$$\begin{aligned}(a,e_i)\prec_3(b,e_j)\Longleftrightarrow{}&(|a|_1,|a|_2,e_i,k_1,\ldots,k_m,|l_1|,\ldots,|l_n|,l_1,\ldots,l_n)\\&<(|b|_1,|b|_2,e_j,r_1,\ldots,r_m,|s_1|,\ldots,|s_n|,s_1,\ldots,s_n)\ \text{ in lexicographic order.}\end{aligned}$$

则 "$\prec_1$", "$\prec_2$", "$\prec_3$" 都是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\times E$ 上的广义单项式序.

"$\prec_1$" 称为 "$\prec$" 的 TOP 拓展, "$\prec_2$" 称为 "$\prec$" 的 POT 拓展. "$\prec_3$" 在 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times E$ 上直接定义.

引理 2.11 设 $\{\mathbb{Z}_j^{(n)}, j = 1, \ldots, k\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的轨道分解, 每个轨道作为半群同构于 $\mathbb{N}^n$, "$\prec$" 是 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 上相对于该轨道分解的广义单项式序, 则 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 中每个严格下降序列是有限的. 特别地, $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 的每个子集含有最小元.

证明 设 $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \cdots$ 是 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 中严格下降序列. 由于只有有限多个轨道, 不失一般性可假定所有 a_j 是相似的, 在同一个 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}_i^{(n)}$ 中. 由条件它作为半群同构于 $\mathbb{N}^{m+n}$. 在 $\mathbb{N}^{m+n}$ 上定义 $\prec_1$,

$$a \prec_1 b \Longleftrightarrow f^{-1}(a) \prec f^{-1}(b),$$

其中 f 是 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}_i^{(n)}$ 到 $\mathbb{N}^{m+n}$ 的同构映射, 则 $\prec_1$ 是 $\mathbb{N}^{m+n}$ 上的单项式序. 由单项式序的熟知性质, 引理得证.

引理 2.11 保证了基于广义单项式序的算法能够在有限步后终止. 它可直接推广到差分 - 微分模情形.

推论 2.12 设 $\mathbb{Z}^n$ 上的轨道分解及 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times E$ 上的广义单项式序 "$\prec$" 已给定, 则 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times E$ 中每个严格下降序列是有限的. 特别地, $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times E$ 的每个子集含有最小元.

证明 设 $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots$ 是 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times E$ 中严格下降序列. 由于 $E = \{e_1, \ldots, e_q\}$ 是有限集, 可假定所有 a_j 在同一个 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times \{e_i\}$ 中, 由引理 2.11 即得推论成立.

3 有限生成差分-微分模上的 Gröbner 基

以下皆假设给定了 $\mathbb{Z}^n$ 上一个轨道分解 $\{\mathbb{Z}_j^{(n)},\ j = 1, \ldots, k\}$ 及 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$ 上一个广义单项式序 "$\prec$". Λ 是所有形如 (1.1) 式的元所成半群. 由于 Λ 同构于 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n$, "$\prec$" 定义了 Λ 上一个序, 我们也称 "$\prec$" 为 Λ 上的广义单项式序.

设 K 是 Δ-σ-域, D 是 K 上的 Δ-σ 算子环, F 是以 $E = \{e_1, \ldots, e_q\}$ 为生成元集的有限生成自由 D 模, 则 F 可看作由所有形如 λe_i $(i = 1, \ldots, q,\ \lambda \in \Lambda)$ 的元素生成的 K-向量空间. 该生成元集记为 ΛE, 其中元素称为 F 的项. 特别地, Λ 中元素称为 D 的项. 若 "$\prec$" 是 $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^n \times E$ 上广义单项式序, 则它也定义了 ΛE 上一个广义单项式序.

F 中每个元素 f 可唯一地表示为一些项的线性组合

$$f = a_1\lambda_1 e_{j_1} + \cdots + a_d\lambda_d e_{j_d}, \tag{3.1}$$

其中 $0 \neq a_i \in R\ (i=1, \ldots, d)$, $\lambda_1 e_{j_1}, \ldots, \lambda_d e_{j_d} \in \Lambda E$ 是互不相同的项. 若 $(k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_n)$ 与 $(r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_n)$ 相似, 则称 $\lambda_1 = \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_n^{l_n}$ 与 $\lambda_2 = \delta_1^{r_1} \cdots \delta_m^{r_m} \alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_n^{s_n} \in \Lambda$ 相似, 以及 $u = \lambda_1 e_i$ 与 $v = \lambda_2 e_j \in \Lambda E$ 相似.

定义 3.1 设 "$\prec$" 是 ΛE 上广义单项式序, $f \in F$ 形如 (3.1) 式, 则称

$$\mathrm{lt}(f) = \max\nolimits_{\prec}\{\lambda_i e_{j_i} | i = 1, \ldots, d\}$$

为 f 的首项. 当 $\lambda_i e_{j_i} = \mathrm{lt}(f)$ 时, 称 $\mathrm{lc}(f) = a_i$ 为 f 的首项系数.

定义 3.2 设 λ 形如 (1.1) 式, 则称

$$\Lambda_j = \{\lambda = \delta_1^{k_1} \ldots \delta_m^{k_m} \alpha_1^{l_1} \ldots \alpha_n^{l_n} | (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}_j^{(n)}\}$$

为 Λ 的第 j 轨道, 其中 $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的第 j 轨道. 若 F 是有限生成 D-模, ΛE 是 F 的所有项所成集合, 则称

$$\Lambda_j E = \{\lambda e_i | \lambda \in \Lambda_j,\ e_i \in E\}$$

为 ΛE 的第 j 轨道.

引理 3.3 设 $\lambda \in \Lambda$, $a \in K$, "$\prec$" 是 $\Lambda \subseteq D$ 上广义单项式序, 则

$$\lambda a = a'\lambda + \xi,$$

其中 $a' = \alpha(a)$ 对某个 $\alpha \in \Gamma$. 若 $a \neq 0$ 则 $a' \neq 0$; $\xi \in D$ 满足 $\mathrm{lt}(\xi) \prec \lambda$, 且 ξ 的每项都相似于 λ.

证明 设 $\lambda = \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_n^{l_n}$, 记 $\alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_n^{l_n}$ 为 α. 由 (1.3) 式有

$$\begin{aligned}\lambda a = \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \alpha(a)\alpha = \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} a'\alpha = (a'\delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} + \eta)\alpha \\ = a'\delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m}\alpha + \eta\alpha,\end{aligned}$$

其中 $\eta \in R[\Delta]$, $a' = \alpha(a)$. 因为 $\alpha_j \in \sigma$, $j = 1, \ldots, n$ 是可逆的, 故当 $a \neq 0$ 时 $a' \neq 0$.

若 $\mathrm{lt}(\eta) = \delta_1^{k_1'} \cdots \delta_m^{k_m'}$, 由 (1.3) 式显见 $(k_1, \cdots, k_m) \in \{(k_1', \ldots, k_m') + \mathbb{N}^m\}$. 即有 $\mathrm{lt}(\eta) \prec \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m}$. 又由于 $\delta\alpha$ 与 $\eta\alpha$ 总是相似的, 故 $\xi = \eta\alpha$ 的每项都相似于 λ. 注意 $\delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m}$ 在 Λ 的每个轨道中, 有 $\mathrm{lt}(\xi) = \mathrm{lt}(\eta\alpha) \prec \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m}\alpha = \lambda$.

引理 3.4 设 F 是有限生成自由 D-模, $0 \neq f \in F$, 则下列论断成立:

(i) 若 $\lambda \in \Lambda$, 则 $\mathrm{lt}(\lambda f) = \max_{\prec}\{\lambda u_i\}$, 其中 u_i 是 f 的项. 且有 f 的唯一项使 $\mathrm{lt}(\lambda f) = \lambda u$.

(ii) 若 $\mathrm{lt}(f) \in \Lambda_j e$, 则对任意 $\lambda \in \Lambda_j$ 有

$$\mathrm{lt}(\lambda f) = \lambda \mathrm{lt}(f) \in \Lambda_j E.$$

证明 (i) 设 $f = \sum_{i=1}^d a_i \lambda_i e_{j_i}$ 及 $\lambda \in \Lambda$, 由引理 3.3 可得

$$\lambda f = \sum_{i=1}^d \lambda a_i \lambda_i e_{j_i} = \sum_{i=1}^d (a_i'\lambda + \xi_i)\lambda_i e_{j_i}, \tag{3.2}$$

其中 $\xi_i \in D$ 满足 $\mathrm{lt}(\xi_i) \prec \lambda$. 由引理 3.3 的证明还可知 ξ_i 的每项形如 $\sigma_i\alpha$ 且 $\sigma_i \in \Theta$, $\alpha = \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_n^{l_n}$ 满足 $\lambda = \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_n^{l_n}$, 从而有

$$\sigma_i \alpha \lambda_i e_{j_i} \prec \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \alpha \lambda_i e_{j_i} = \lambda\lambda_i e_{j_i}, \tag{3.3}$$

这样得到 $\mathrm{lt}(\lambda f) \in \{\lambda\lambda_i e_{j_i}\}$. 又若 $\lambda\lambda_i e_{j_i} = \lambda\lambda_i' e_{j_i}'$, 则 $e_{j_i} = e_{j_i}'$, $\lambda_i = \lambda_i'$. 故 $\mathrm{lt}(\lambda f) = \max_{\prec}\{\lambda\lambda_i e_{j_i} | i = 1, \ldots, d\} = \lambda u$ 对 f 的唯一的项 u 成立.

(ii) 设 f 如前, $\mathrm{lt}(f) = \lambda_1 e_{j_1} \in \Lambda_j E$. 若 $\lambda \in \Lambda_j$, 则在 (3.2) 式中有 $\lambda_i e_{j_i} \prec \lambda_1 e_{j_1}$. 再由 λ 相似于 λ_1 得

$$\lambda\lambda_i e_{j_i} \prec \lambda\lambda_1 e_{j_1}. \tag{3.4}$$

由 (3.3) 及 (3.4) 式即得 $\mathrm{lt}(\lambda f) = \lambda \mathrm{lt}(f) \in \Lambda_j E$.

引理 3.5 设 F 是有限生成自由 D-模, $0 \neq f \in F$, 则对每个 j, 存在 $\lambda \in \Lambda$ 及 f 的项 u_j, 使得

$$\mathrm{lt}(\lambda f) = \lambda u_j \in \Lambda_j E.$$

满足上式的 f 的项 u_j 还是唯一的: 若 $\mathrm{lt}(\lambda_1 f) = \lambda_1 u_{j_1} \in \Lambda_j E$ 及 $\mathrm{lt}(\lambda_2 f) = \lambda_2 u_{j_2} \in \Lambda_j E$, 则 $u_{j_1} = u_{j_2}$. 我们把这个唯一的项 u_j 记为 $\mathrm{lt}_j(f)$.

证明 设 f 形如 (3.1) 式, $\{\lambda_i e_{j_i} | i=1,\dots,d\}$ 是 f 的所有项. 记 $\lambda_i=\delta^{s_i}\alpha^{t_i}$, $s_i\in\mathbb{N}^m$ 和 $t_i\in\mathbb{Z}^n$. 由定义 2.1(iii), $\mathbb{Z}_j^{(n)}$ 生成的群为 $\mathbb{Z}^n$, 从而存在 u_i, $v_i\in\mathbb{Z}_j^{(n)}$, 使得 $u_i-v_i=t_i$. 即 $\alpha^{v_i}\lambda_i=\delta^{s_i}\alpha^{u_i}\in\Lambda_j$. 令 $\zeta_i=\alpha^{v_i}$, $\lambda=\prod_{i=1}^d\zeta_i$, 则 $\lambda\cdot\lambda_i\in\Lambda_j$ 对所有 $i=1,\dots,d$ 成立. 再由引理 3.3 得

$$\lambda f=\sum_{i=1}^d\lambda a_i\lambda_i e_{j_i}=\sum_{i=1}^d(a_i'\lambda+\xi_i)\lambda_i e_{j_i},$$

因为在 λ 中没有 δ 因子, 故由引理 3.3 的证明可知 $\xi_i=0$. 即知 λf 的所有项在 Λ_jE 中, 当然 $\mathrm{lt}(\lambda f)\in\Lambda_jE$.

现设 f 的项 u 和 v 都满足 $\mathrm{lt}(\lambda f)=\lambda u\in\Lambda_jE$ 和 $\mathrm{lt}(\eta f)=\eta v\in\Lambda_jE$. 对 λ, $\eta\in\Lambda$ 已证明存在 $\zeta\in\Lambda_j$, 使得 $\zeta\lambda$, $\zeta\eta\in\Lambda_j$. 因为 $\zeta\in\Lambda_j$, 故由 $\lambda v\preceq\lambda u$, $\eta u\preceq\eta v$ 有 $\zeta\lambda v\preceq\zeta\lambda u$, $\zeta\eta u\prec\zeta\eta v$. 又因为 $\zeta\lambda$, $\zeta\eta\in\Lambda_j$, 故 $(\zeta\eta)\zeta\lambda v\preceq(\zeta\eta)\zeta\lambda u$, $(\zeta\lambda)\zeta\eta u\preceq(\zeta\lambda)\zeta\eta v$, 从而 $\zeta\eta\zeta\lambda v=\zeta\eta\zeta\lambda u$, 即得 $u=v$.

记这个 u 为 $\mathrm{lt}_j(f)$, 则对任意满足 $\mathrm{lt}(\lambda f)\in\Lambda_jE$ 的 $\lambda\in\Lambda$, 有 $\mathrm{lt}(\lambda f)=\lambda\mathrm{lt}_j(f)$.

命题 3.6 设 $0\neq f\in F$, $0\neq h\in D$, 则 $\mathrm{lt}(hf)=\max_{\prec}\{\lambda_i u_k\}$, 其中 λ_i 是 h 的项, u_k 是 f 的项. 且有 h 中唯一的项 λ 和 f 中唯一的项 u, 使得 $\mathrm{lt}(hf)=\lambda u$.

证明 设 $h=\sum_{i\in I}b_i\lambda_i$, 其中 I 是有限集, λ_i, $i\in I$, 是 Λ 中不同元素, 则

$$hf=\sum_{i\in I}b_i\lambda_i f,$$

由引理 3.4 (i), 存在 f 的唯一的项 u_{k_i}, 使得 $\mathrm{lt}(\lambda_i f)=\lambda_i u_{k_i}\succeq\lambda_i u_k$ 对所有 f 的项 u_k 成立. 且 $\mathrm{lt}(\lambda_i f)=\lambda_i u_{k_i}$, $i\in I$, 必互不相同: 若 $\mathrm{lt}(\lambda_{i_1}f)=\mathrm{lt}(\lambda_{i_2}f)$, 则它们必在同一个 Λ_jE 中, 由引理 3.5 存在 f 的唯一的项 $\mathrm{lt}_j(f)$, 使得

$$\mathrm{lt}(\lambda_{i_1}f)=\lambda_{i_1}\mathrm{lt}_j(f)=\mathrm{lt}(\lambda_{i_2}f)=\lambda_{i_2}\mathrm{lt}_j(f)\in\Lambda_jE.$$

得到 $\lambda_{i_1}=\lambda_{i_2}$, 矛盾. 故

$$\mathrm{lt}(hf)\in\{\lambda_i u_{k_i}\}_{i\in I}=\{\mathrm{lt}(\lambda_i f)\}_{i\in I}.$$

即存在唯一的 i_0, 使得

$$\mathrm{lt}(hf)=\mathrm{lt}(\lambda_{i_0}f)=\lambda_{i_0}u_{k_{i_0}}\succeq\lambda_i u_k \tag{3.5}$$

对一切 h 的项 λ_i 和 f 的项 u_k 成立.

定理 3.7 设 $f_1,\dots,f_p\in F\backslash\{0\}$, 则每个 $g\in F$ 可表示为

$$g=h_1f_1+\cdots+h_pf_p+r, \tag{3.6}$$

其中 $h_1,\dots,h_p\in D$, $r\in F$ 满足

(i) $h_i=0$ 或 $\mathrm{lt}(h_if_i)\preceq\mathrm{lt}(g)$, $i=1,\dots,p$,

(ii) $r=0$ 或 $\mathrm{lt}(r)\preceq\mathrm{lt}(g)$, 使得 $\mathrm{lt}(r)\notin\{\mathrm{lt}(\lambda f_i)|\lambda\in\Lambda, i=1,\dots,p\}$.

证明 $h_1,\dots,h_p\in D$ 和 $r\in F$ 可由下列算法得到:

首先令 $r=g$, $h_i=0$, $i=1,\dots,p$.

若 $r\neq0$, 即

$$r=\mathrm{lc}(r)\mathrm{lt}(r)+r'.$$

$\mathrm{lt}(r)=\mathrm{lt}(\lambda_if_i)$ 对某个 f_i 和某个 $\lambda_i\in\Lambda$ 成立, 则有

$$\lambda_if_i=c_i\mathrm{lt}(\lambda_if_i)+\xi_i,$$

其中 $c_i = \mathrm{lc}(\lambda_i f_i)$, $\mathrm{lt}(\xi_i) \prec \mathrm{lt}(\lambda_i f_i)$, 从而

$$r = \mathrm{lc}(r)\mathrm{lt}(r) + r' = \mathrm{lc}(r)\mathrm{lt}(\lambda_i f_i) + r' = \frac{\mathrm{lc}(r)}{c_i}(\lambda_i f_i - \xi_i) + r'.$$

令 $b_i = \frac{\mathrm{lc}(r)}{c_i}$, $r_i = \frac{\mathrm{lc}(r)}{c_i}(-\xi_i) + r'$, 则

$$r = b_i \lambda_i f_i + r_i.$$

再以 r_i 代替 r, 以 $h_i + b_i\lambda_i$ 代替 h_i 进入下一个循环. 在每一次循环中有

$$\mathrm{lt}(r_i) \prec \mathrm{lt}(\lambda_i f_i) \preceq \mathrm{lt}(r) \preceq \mathrm{lt}(g),$$

故由推论 2.12, 算法可在有限步后终止.

定义 3.8 设 $f_1, \ldots, f_p \in F\backslash\{0\}$, $g \in F$, 等式 (3.6) 成立且满足定理 3.7 的条件 (i) 和 (ii). 若 $r \neq g$ 则称 g 可被 $\{f_1, \ldots, f_p\}$ 约化到 r, 此时必有 $\mathrm{lt}(r) \prec \mathrm{lt}(g)$. 若 $r = g$ 且 $h_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$, 则称 g 相对于 $\{f_1, \ldots, f_p\}$ 是约化的.

下例说明了定理 3.7 中的条件 (ii) 的含义.

例 3.9 设 $K = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$, $D = K[\delta_1, \delta_2, \alpha, \alpha^{-1}]$. 其中 δ_1 和 δ_2 分别对 x_1 和 x_2 的偏导算子, α 是 K 的自同构. 取 $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$ 上的广义单项式序如例 2.6, 即

$$\begin{aligned} & u = \delta_1^{k_1}\delta_2^{k_2}\alpha^l \prec v = \delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}\alpha^s \\ & \Longleftrightarrow (|u|, k_1, k_2, l) < (|v|, r_1, r_2, s) \ \text{ in lexicographic order,} \end{aligned}$$

其中 $|u| = k_1 + k_2 + |l|$.

取 $g = \delta_1\alpha^{-2} + \delta_2\alpha^2$, $f = \delta_1\alpha^{-1} + \alpha$, 则

$$g = \delta_1\alpha^{-2} + \delta_2\alpha^2 = \alpha^{-1}(\delta_1\alpha^{-1} + \alpha) + (\delta_2\alpha^2 - 1) = \alpha^{-1}f + r_1.$$

尽管 $\mathrm{lt}(r_1) = \delta_2\alpha^2$ 不是 $\mathrm{lt}(f) = \delta_1\alpha^{-1}$ 的倍式, 仍有 $\lambda = \delta_2\alpha$, 使得 $\mathrm{lt}(r_1) = \mathrm{lt}(\lambda f) = \mathrm{lt}(\delta_1\delta_2 + \delta_2\alpha^2)$, 从而

$$g = \alpha^{-1}f + \delta_2\alpha f + (-\delta_1\delta_2 - 1) = (\alpha^{-1} + \delta_2\alpha)f + r_2.$$

现 r_2 满足定理 3.7 中的条件 (ii), 故 g 可被 f 约化到 r_2.

定义 3.10 设 W 是有限生成自由 D-模 F 的子模, $\prec$ 是 ΛE 上的广义单项式序, $G = \{g_1, \ldots, g_p\} \in W\backslash\{0\}$. 称 G 为 W 的 Gröbner 基 (相对于广义单项式序 $\prec$), 如果对任意 $f \in W\backslash\{0\}$, $\mathrm{lt}(f) = \mathrm{lt}(\lambda g_i)$, $\lambda \in \Lambda$, $g_i \in G$. 若 G 的每个元素相对于 G 的其他元素约化, 则称 G 为 W 的约化 Gröbner 基.

命题 3.11 设 G 是 $W\backslash\{0\}$ 的有限集. 下列论断成立:

(i) G 是 W 的 Gröbner 基当且仅当每个 $f \in W$ 可被 G 约化到 0, 从而 W 的 Gröbner 基生成 D-模 W.

(ii) 若 G 是 W 的 Gröbner 基, $f \in F$, 则 $f \in W$ 当且仅当 f 可被 G 约化到 0.

(iii) 若 G 是 W 的 Gröbner 基, 则 $f \in W$ 相对于 G 约化当且仅当 $f = 0$.

证明 (i) 若 G 是 W 的 Gröbner 基, $f \in W$, 则由定理 3.7, f 可被 G 约化到 r, 且 $rmlt(r)$ 不等于任意一个 $\mathrm{lt}(\lambda g)$, $\lambda \in \Lambda$, $g \in G$. 若 $r \neq 0$ 则 $r \in W$, 从而 $\mathrm{lt}(r) = \mathrm{lt}(\lambda g)$ 对某个 $g \in G$, $\lambda \in \Lambda$, 矛盾.

若每个 $f \in W$ 可被 G 约化到 0, 则 $f = \sum_{g\in G} h_g g$. 由命题 3.6, 存在 $g \in G$, 使得 $\mathrm{lt}(f) = \max_{g\in G}\{\mathrm{lt}(h_g g)\} = \lambda u$ 对 h_g 的项 λ 及 g 的项 u 成立, 故 $\mathrm{lt}(f) = \mathrm{lt}(\lambda g)$. 由定义 3.10 即得 G 是 W 的 Gröbner 基.

(ii) 和 (iii) 由定理 3.7 及定义 3.10 立得.

例 3.12 若 W 由一个元素 $g \in F\backslash\{0\}$ 生成, 则 $W\backslash\{0\}$ 的任意包含了 g 的有限子集 G 是 W 的 Gröbner 基. 事实上, 由 $0 \neq f \in W$ 可得 $f = hg$ 对某个 $h \in D\backslash\{0\}$ 成立. 由命题 3.6, $\mathrm{lt}(f) = \lambda u = \max_{\prec}\{\lambda_i u_k\}$ 对 h 的项 λ 及 g 的项 u 成立. 故 $\mathrm{lt}(f) = \mathrm{lt}(\lambda g)$. 再由定义 3.10 得 G 是 W 的 Gröbner 基.

定义 3.13 设 F 是有限生成自由 D-模, $f,\ g \in F\backslash\{0\}$. 对每个 Λ_j 记 $V(j,f,g)$ 为 $K[\Lambda_j]$-模 ${}_{K[\Lambda_j]}\langle \mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_j E \mid \lambda \in \Lambda\rangle \bigcap_{K[\Lambda_j]}\langle \mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_j E \mid \eta \in \Lambda\rangle$ 的有限生成元集 (这些生成元都是项), 则对每个生成元 $v \in V(j,f,g)$, 称

$$S(j,f,g,v) = \frac{v}{lt_j(f)}\frac{f}{lc_j(f)} - \frac{v}{lt_j(g)}\frac{g}{lc_j(g)}$$

为 f 和 g 的相对于 j 和 v 的 S- 多项式.

在定义 3.13 中考虑的 $K[\Lambda_j]$-模是 "单项式模", 即它可由单项式生成. 这种模总有 "单项式基". 以下总设 $V(j,f,g)$ 是一个单项式基.

$V(j,f,g)$ 的计算涉及所取的广义单项式序. Pauer 和 Unterkircher[8] 在 Laurent 多项式环的计算中研究了 $V(j,f,g)$, 并给出了一些重要情形下的算法. 这些算法对差分-微分模仍适用.

例 3.14 设 $F = D = K[\delta_1,\delta_2,\alpha_1,\alpha_1^{-1},\alpha_2,\alpha_2^{-1}]$, $K = \mathbb{Q}(x_1,x_2)$. 其中 δ_1 和 δ_2 分别是对 x_1 和 x_2 的偏微分算子, α_1 和 α_2 是 K 上的两个自同构. 取 $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}^2$ 上的广义单项式序如例 2.8, 即

$$\begin{aligned} & u = \delta_1^{k_1}\delta_2^{k_2}\alpha_1^{l_1}\alpha_2^{l_2} \prec v = \delta_1^{r_1}\delta_2^{r_2}\alpha_1^{s_1}\alpha_2^{s_2} \\ & \Longleftrightarrow (\|u\|,k_1,k_2,l_1,l_2) < (\|v\|,r_1,r_2,s_1,s_2) \ \text{ in lexicographic order.} \end{aligned}$$

其中 $\|u\| = -\min(0,l_1,l_2)$.

设 $f = \alpha_1^{-2} - \delta_2$, $g = \delta_1 + \alpha_2^4$. Λ 的轨道为 $\Lambda_0,\Lambda_1,\Lambda_2$ (见例 2.3). 可得

$$\begin{aligned} & \{\lambda \in \Lambda \mid \mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_0\} = \Lambda_0\alpha_1^2, \qquad \{\eta \in \Lambda \mid \mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_0\} = \Lambda_0, \\ & \{\mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_0 \mid \lambda \in \Lambda\} = \Lambda_0\delta_2\alpha_1^2, \qquad \{\mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_0 \mid \eta \in \Lambda\} = \Lambda_0\delta_1, \end{aligned}$$

从而 $V(0,f,g) = \{v_0\} = \{\delta_1\delta_2\alpha_1^2\}$. 再由定义 3.13 得

$$S(0,f,g,v_0) = \delta_1\alpha_1^2 f + \delta_2\alpha_1^2 g = \delta_1 + \delta_2\alpha_1^2\alpha_2^4.$$

类似可得

$$\begin{aligned} & \{\lambda \in \Lambda \mid \mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_1\} = \Lambda_1\alpha_1, \qquad \{\eta \in \Lambda \mid \mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_1\} = \Lambda_1, \\ & \{\mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_1 \mid \lambda \in \Lambda\} = \Lambda_1\alpha_1^{-1}, \qquad \{\mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_1 \mid \eta \in \Lambda\} = \Lambda_1\delta_1. \end{aligned}$$

从而 $V(1,f,g) = \{v_1\} = \{\delta_1\alpha_1^{-1}\}$ 及

$$S(1,f,g,v_1) = \delta_1\alpha_1 f - \alpha_1^{-1} g = -\delta_1\delta_2\alpha_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2^4.$$

最后,

$$\begin{aligned} & \{\lambda \in \Lambda \mid \mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_2\} = \Lambda_2\alpha_1^2, \qquad \{\eta \in \Lambda \mid \mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_2\} = \Lambda_2, \\ & \{\mathrm{lt}(\lambda f) \in \Lambda_2 \mid \lambda \in \Lambda\} = \Lambda_2\delta_2\alpha_1^2, \qquad \{\mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_2 \mid \eta \in \Lambda\} = \Lambda_2\delta_1. \end{aligned}$$

故 $V(2,f,g) = \{v_2\} = \{\delta_1\delta_2\alpha_1^2\}$ 以及

$$S(2,f,g,v_2) = \delta_1\alpha_1^2 f + \delta_2\alpha_1^2 g = \delta_1 + \delta_2\alpha_1^2\alpha_2^4.$$

引理 3.15 设 $\{r_1,\ldots,r_l\}\subseteq F$, $\{a_1,\ldots,a_l\}\subseteq K$. 若 $\sum_{j=1}^{l}a_j=0$, 则存在 $b_j\in K$, 使得

$$\sum_{j=1}^{l}a_jr_j=\sum_{j=1}^{l-1}b_j(r_j-r_{j+1}).$$

证明 显见

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l}a_jr_j=&a_1(r_1-r_2)+(a_1+a_2)(r_2-r_3)+(a_1+a_2+a_3)(r_3-r_4)\\&+\cdots+(a_1+a_2+\ldots+a_{l-1})(r_{l-1}-r_l)+(a_1+a_2+\ldots+a_l)r_l.\end{aligned}$$

因为 $a_1+a_2+\cdots+a_l=0$, 故有 $b_j\in K$,

$$\sum_{j=1}^{l}a_jr_j=\sum_{j=1}^{l-1}b_j(r_j-r_{j+1}).$$

引理 3.16 设 $g_i,\ g_k\in F$, $\mathrm{lt}(\lambda g_i)=\mathrm{lt}(\eta g_k)=u\in\Lambda_jE$, 其中 $\lambda,\ \eta\in\Lambda$, 则存在 $\zeta\in\Lambda_j$ 及 $v\in V(j,g_i,g_k)$, 使得 $u=\zeta v$. 又若 G 是 $F\backslash\{0\}$ 的有限子集, S-多项式 $S(j,g_i,g_k,v)$ 可被 G 约化到 0, 则

$$\zeta S(j,g_i,g_k,v)=\frac{u}{\mathrm{lt}_j(g_i)}\frac{g_i}{\mathrm{lc}_j(g_i)}-\frac{u}{\mathrm{lt}_j(g_k)}\frac{g_k}{\mathrm{lc}_j(g_k)}=\sum_{g\in G}h_gg,$$

且对一切 $g\in G$ 有 $\mathrm{lt}(h_gg)\prec u$.

证明 设 $V(j,g_i,g_k)=\{v_1,\ldots,v_l\}$, 则

$$u=\sum_{\mu}p_\mu v_\mu,$$

其中 $p_\mu\in K[\Lambda_j]$. 由于 $p_\mu=\sum_\nu a_{\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu}\in R$, $\lambda_{\mu\nu}\in\Lambda_j$, 故

$$u=\sum_{\mu,\nu}a_{\mu\nu}(\lambda_{\mu\nu}v_\mu).$$

又由于 u 和 $\lambda_{\mu\nu}v_\mu$ 都是 Λ_jE 的项, 故可重写上式右边, 使得项 $\lambda_{\mu\nu}v_\mu$ 各不相同. 这样存在唯一的 $a_{\mu\nu}=1$ 其他为 0. 得到 $u=\zeta v$ 对某个 $\zeta\in\Lambda_j$ 和 $v\in V(j,g_i,g_k)$ 成立.

现若 $S(j,g_i,g_k,v)$ 可被 G 约化到 0, 则

$$S(j,g_i,g_k,v)=\sum_{g\in G}h'_gg,$$

且对一切 $g\in G$ 有 $lt(h'_gg)\preceq\mathrm{lt}(S(j,g_i,g_k,v))\prec v$. 从而

$$\zeta S(j,g_i,g_k,v)=\sum_{g\in G}(\zeta h'_g)g=\sum_{g\in G}h_gg$$

其中 $h_g=\zeta h'_g$. 由引理 3.4 (i), 对 h'_gg 的某项 w 有 $\mathrm{lt}(\zeta h'_gg)=\zeta w$. 故 $\mathrm{lt}(h_gg)=\mathrm{lt}(\zeta h'_gg)=\zeta w$, 从而得到 $w\preceq\mathrm{lt}(h'_gg)\prec v$, $\zeta\in\Lambda_j$ 以及 $\zeta w\prec\zeta v=u$.

定理 3.17 (Buchberger 定理的推广) 设 F 是有限生成自由 D-模, $\prec$ 是 ΛE 上广义单项式序, G 是 $F\backslash\{0\}$ 的有限子集, W 是 F 的由 G 生成的子模, 则 G 是 W 的 Gröbner 基当且仅当对所有 Λ_j, 所有 $g_i,\ g_k\in G$, 以及所有 $v\in V(j,g_i,g_k)$, S-多项式 $S(j,g_i,g_k,v)$ 可被 G 约化到 0.

证明 若 G 是 W 的 Gröbner 基, 则 $S(j,g_i,g_k,v)$ 是 W 的元素, 由命题 3.11 即知 $S(j,g_i,g_k,v)$ 可被 G 约化到 0.

现设 G 是 $F\backslash\{0\}$ 的有限子集, W 是 F 的由 G 生成的子模. 并设对所有 Λ_j, 所有 $g_i,\ g_k\in G$, 以及所有 $v\in V(j,g_i,g_k)$, S-多项式 $S(j,g_i,g_k,v)$ 可被 G 约化到 0. 只要证明对任意 $f\in W\backslash\{0\}$, 必有 $\lambda\in\Lambda$ 和 $g\in G$, 使得 $\mathrm{lt}(f)=\mathrm{lt}(\lambda g)$.

由于 W 由 G 生成, 故存在 $\{h_g\}_{g\in G}\subseteq D$, 使得

$$f=\sum_{g\in G}h_g g.$$

令 $u=\max_{\prec}\{\mathrm{lt}(h_g g)\mid g\in G\}$. 可选择 $\{h_g\mid g\in G\}$, 使得 u 达到最小, 即若有 $f=\sum_{g\in G}h'_g g$, 则 $u\preceq\max_{\prec}\{\mathrm{lt}(h'_g g)\mid g\in G\}$. 由命题 3.6 知 $u\succeq\lambda g$ 对 h_g 的所有项 λ 和所有 $g\in G$ 成立.

若 $\mathrm{lt}(f)=u=\mathrm{lt}(h_g g)$ 对某个 $g\in G$ 成立, 则由 (3.5) 式知存在 h_g 的项 λ, 使得 $\mathrm{lt}(f)=\mathrm{lt}(\lambda g)$. 定理自然成立. 这样只要证明 $\mathrm{lt}(f)\prec u$ 不可能成立.

现设 $\mathrm{lt}(f)\prec u$. 记 $B=\{g\mid \mathrm{lt}(h_g g)=u\succ\mathrm{lt}(f)\}$. 由 (3.5) 式知存在 h_g 的唯一的项 λ_g, $g\in B$, 使得对任意 h_g 的项 $\eta_g\neq\lambda_g$ 有 $u=\mathrm{lt}(\lambda_g g)\succ\mathrm{lt}(\eta_g g)$. 设 c_g 是 h_g 在 λ_g 的系数. 得到

$$f=\sum_{g\in B}h_g g+\sum_{g\notin B}h_g g=\sum_{g\in B}c_g\lambda_g g+\sum_{g\in B}(h_g-c_g\lambda_g)g+\sum_{g\notin B}h_g g, \tag{3.7}$$

其中所有出现在后两个和式中的项都 $\prec u$.

由引理 3.4 (i), 可设 v_g 为 g 的一项, 它使得对任何 g 的项 $v\neq v_g$ 有 $u=\mathrm{lt}(\lambda_g g)=\lambda_g v_g\succ\lambda_g v$. 设 d_g 是 g 在 v_g 的系数. 由引理 3.3,

$$\begin{aligned}\sum_{g\in B}c_g\lambda_g g&=\sum_{g\in B}c_g\lambda_g d_g\left(\frac{g}{d_g}\right)=\sum_{g\in B}c_g(d'_g\lambda_g+\xi_g)\left(\frac{g}{d_g}\right)\\&=\sum_{g\in B}c_g d'_g\lambda_g\left(\frac{g}{d_g}\right)+\sum_{g\in B}c_g\xi_g\left(\frac{g}{d_g}\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

对某些 $d'_g\in K$ 和 $\xi_g\in D$ 成立, 且所有出现在最后一个和式中的项都 $\prec u$.

现 u 只出现在

$$\begin{aligned}\sum_{g\in B}c_g d'_g\lambda_g\left(\frac{g}{d_g}\right)&=\sum_{g\in B}c_g d'_g\lambda_g v_g+\sum_{g\in B}c_g d'_g\lambda_g\left(\frac{g}{d_g}-v_g\right)\\&=\left(\sum_{g\in B}c_g d'_g\right)u+\sum_{g\in B}c_g d'_g\lambda_g\left(\frac{g}{d_g}-v_g\right),\end{aligned}$$

且所有出现在最后一个和式中的项都 $\prec u$. 因 $lt(f)\prec u$ 故 $\sum_{g\in B}c_g d'_g=0$. 记 $\lambda_g(\frac{g}{d_g})$ 为 r_g, 则由引理 3.15,

$$\sum_{g\in B}c_g d'_g\lambda_g(\frac{g}{d_g})=\sum_{g\in B}(c_g d'_g)r_g=\sum_{i,k}b_{i,k}(r_{g_i}-r_{g_k}), \tag{3.9}$$

对于 $g_i,\ g_k\in B$.

由于

$$r_{g_i}-r_{g_k}=\lambda_{g_i}\left(\frac{g_i}{d_{g_i}}\right)-\lambda_{g_k}\left(\frac{g_k}{d_{g_k}}\right),$$

且 $\lambda_{g_i}v_{g_i}=\lambda_{g_k}v_{g_k}=u\in\Lambda_j E$ 对某 Λ_j 成立, 故由引理 3.14 可得 $v_{g_i}=lt_j(g_i)$, $v_{g_k}=lt_j(g_k)$, $d_{g_i}=lc_j(g_i)$, $d_{g_k}=lc_j(g_k)$, $\lambda_{g_i}=\frac{u}{lt_j(g_i)}$, $\lambda_{g_k}=\frac{u}{lt_j(g_k)}$, 从而

$$r_{g_i}-r_{g_k}=\frac{u}{lt_j(g_i)}\frac{g_i}{lc_j(g_i)}-\frac{u}{lt_k(g_k)}\frac{g_k}{lc_j(g_k)},$$

且 $\mathrm{lt}(r_{g_i}-r_{g_k})\prec u$.

又由于对所有 Λ_j, 所有 $g_i,\ g_k\in G$, 以及所有 $v\in V(j,g_i,g_k)$, S- 多项式 $S(j,g_i,g_k,v)$ 可被 G 约化到 0, 故由引理 3.16 可知

$$r_{g_i}-r_{g_k}=\sum_{g\in G}p_g g, \tag{3.10}$$

且 $\mathrm{lt}(p_g g)\prec u$.

把 (3.10) 式代入 (3.9) 式右边的 $r_{g_i}-r_{g_k}$, 再把 (3.9) 式代入 (3.8) 式右边的第 1 个和式, 再把 (3.8) 式代入 (3.7) 式右边的第 1 个和式, 得到另一个 f 的表达式 $f=\sum_{g\in G}h'_g g$ 且 $u\succ\max_{\prec}\{\mathrm{lt}(h'_g g)\mid g\in G\}$, 这与 u 的最小性矛盾. 定理得证.

例 3.18 若 W 是 F 的由有限集 G 生成的子模, 而每个 $g\in G$ 只有一项, 则 G 是 W 的 Gröbner 基. 事实上此时所有 S-多项式 $S(j,g_i,g_k,v)$ 为 0. 由定理 3.17 得 G 是 W 的 Gröbner 基.

定理 3.19(Buchberger 算法) 设 F 是有限生成自由 D-模, $\prec$ 是 ΛE 上广义单项式序, G 是 $F\backslash\{0\}$ 的有限子集, W 是 F 的由 G 生成的子模. 对 Λ_j 及 $f,g\in F\backslash\{0\}$ 令 $V(j,f,g)$ 和 $S(j,f,g,v)$ 如定义 3.13, 则由下列算法可得到 W 的一个 Gröbner 基:

Input: $G=\{g_1,\ldots,g_\mu\}$, W 的生成元集

output: $G'=\{g'_1,\ldots,g'_\nu\}$, W 的一个 Gröbner 基

Begin

$G_0:=G$

While 存在 $f,g\in G_i$ 及 $v\in V(j,f,g)$ 使得 $S(j,f,g,v)$ 被 G_i 约化到 $r\neq 0$

Do $G_{i+1}:=G_i\bigcup\{r\}$

End

证明 由定理 3.17, 只要证明存在 $i\in\mathbb{N}$, 使得 $G_{i+1}=G_i$. 若不然, 可得到一个无穷的集合链 $G_1\subsetneq G_2\subsetneq\cdots\subsetneq G_i\subsetneq\cdots$. 由于只有有限多个轨道 Λ_j $(j=1,\ldots,n)$, 可设在每个 G_{i+1} 中的 $\mathrm{lt}(r)\in\Lambda_j E$ 对一个固定的 j 成立. 由于在算法的每一个循环中 r 满足: $\mathrm{lt}(r)$ 不等于任意一个 $\mathrm{lt}(\lambda g)$, $\lambda\in\Lambda$, $g\in G_i$. 同时 $\eta\mathrm{lt}(\lambda g)=\mathrm{lt}(\eta\lambda g)=\mathrm{lt}(\lambda' g)\in\Lambda_j E$ 对任意 $\eta\in\Lambda_j$ 及任意 $\mathrm{lt}(\lambda g)\in\Lambda_j E$ 成立 (见引理 3.4 (ii)). 故若 $\mathrm{lt}(r)\in\Lambda_j E$, 则有 $K_j^{(i)}=_{K[\Lambda_j]}\langle\mathrm{lt}(\lambda g)\in\Lambda_j E\mid\lambda\in\Lambda,\ g\in G_i\rangle\subsetneq K_j^{(i+1)}=_{K[\Lambda_j]}\langle\mathrm{lt}(\lambda g)\in\Lambda_j E\mid\lambda\in\Lambda,\ g\in G_{i+1}\rangle$ 作为 $\bigoplus_{e\in E}K[\Lambda_j]e$ 的 $K[\Lambda_j]$-子模成立, 从而对每个 $i\in\mathbb{N}$ 有 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $K_j^{(i)}\subsetneq K_j^{(i+m)}$. 由 $K[\Lambda_j]$ 的 noetherian 性这是不可能的.

例 3.20 设 F 和 Λ 上广义单项式序如例 3.14. 设 $G=\{g_1,g_2,g_3\}$, $g_1=\alpha_2^4+1, g_2=\alpha_1^2-1, g_3=\alpha_1^2\alpha_2^4+1$, 则 G 是它生成的子模 W 的 Gröbner 基. 要证明这点, 需要证明 G 的所有 S-多项式被 G 约化到 0.

用例 3.14 中描述的方法, 可得

$$\begin{aligned}
&V(0,g_1,g_2)=\{\alpha_1^2\alpha_2^4\},\quad V(1,g_1,g_2)=\{\alpha_1^{-1}\alpha_2^3\},\quad V(2,g_1,g_2)=\{\alpha_1\alpha_2^{-1}\},\\
&S(0,g_1,g_2,\alpha_1^2\alpha_2^4)=\alpha_1^2 g_1-\alpha_2^4 g_2=\alpha_1^2+\alpha_2^4=g_1+g_2,\\
&S(1,g_1,g_2,\alpha_1^{-1}\alpha_2^3)=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}g_1+\alpha_1^{-1}\alpha_2^3 g_2=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}+\alpha_1\alpha_2^3=(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1})g_3,\\
&S(2,g_1,g_2,\alpha_1\alpha_2^{-1})=\alpha_1\alpha_2^{-1}g_1-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}g_2=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}+\alpha_1\alpha_2^3=(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1})g_3,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&V(0,g_1,g_3)=\{\alpha_1^2\alpha_2^4\},\quad V(1,g_1,g_3)=\{\alpha_1^{-1}\alpha_2^3\},\quad V(2,g_1,g_3)=\{\alpha_2^{-1}\},\\
&S(0,g_1,g_3,\alpha_1^2\alpha_2^4)=\alpha_1^2g_1-g_3=\alpha_1^2-1=g_2,\\
&S(1,g_1,g_3,\alpha_1^{-1}\alpha_2^3)=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}g_1-\alpha_1^{-1}\alpha_2^3g_3=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}-\alpha_1\alpha_2^7,\\
&\qquad\qquad=(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1})g_3-\alpha_1\alpha_2^3g_1.
\end{aligned}$$

上式右边满足定理 3.7 (i), 即 $\mathrm{lt}(h_ig_i)\preceq\mathrm{lt}(S)$, 其中 $S=S(1,g_1,g_3,\alpha_1^{-1}\alpha_2^3), i=1,3$.

$$S(2,g_1,g_3,\alpha_2^{-1})=\alpha_2^{-1}g_1-\alpha_2^{-1}g_3=\alpha_2^3-\alpha_1^2\alpha_2^3=-\alpha_2^3g_2,$$

最后,

$$V(0,g_2,g_3)=\{\alpha_1^2\alpha_2^4\},\quad V(1,g_2,g_3)=\{\alpha_1^{-1}\},\quad V(2,g_2,g_3)=\{\alpha_1\alpha_2^{-1}\}.$$

故

$$\begin{aligned}
&S(0,g_2,g_3,\alpha_1^2\alpha_2^4)=\alpha_2^4g_2-g_3=-\alpha_2^4-1=-g_1,\\
&S(1,g_2,g_3,\alpha_1^{-1})=\alpha_1^{-1}g_2-\alpha_1^{-1}g_3=\alpha_1\alpha_2^4+\alpha_1=\alpha_1g_1,\\
&S(2,g_2,g_3,\alpha_1\alpha_2^{-1})=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}g_2-\alpha_1\alpha_2^{-1}g_3=-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}-\alpha_1^3\alpha_2^3\\
&\qquad\qquad=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}g_3+\alpha_1\alpha_2^3g_2.
\end{aligned}$$

上式右边也满足定理 3.7 (i).

由定理 3.17, G 是 W 的一个 Gröbner 基.

4 差分-微分维数多项式的计算

本节给出利用差分-微分模的 Gröbner 基计算差分-微分维数多项式的方法, 它比传统的方法更一般和更直接.

设 K 是 Δ-σ-域, D 是 K 上的 Δ-σ-算子环, M 是有限生成 D-模, F 是有限生成自由 D-模. 其它记号如前. 对形如 (1.1) 式的 $\lambda\in\Lambda$, 令 $\mathrm{ord}\lambda=k_1+\cdots+k_m+|l_1|+\cdots+|l_n|$. 对 F 中的项 $w=\lambda e_i\in\Lambda E$, 令 $\mathrm{ord}\ w=\mathrm{ord}\lambda$. 若 $u=\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\lambda\in D$, 令 $\mathrm{ord}\ u=\max\{\mathrm{ord}\lambda\mid a_\lambda\neq 0\}$.

D 可看作滤环, 其上的滤 $(D_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}}$ 满足 $D_\mu=\{u\in D\mid \mathrm{ord}\ u\leqslant\mu\}$, $\mu\in\mathbb{N}$, 且 $D_\mu=0$ 当 $\mu<0$. 显见 $\bigcup\{D_\mu\mid\mu\in\mathbb{Z}\}=D$, $D_\mu\subseteq D_{\mu+1}$ 当 $\mu\in\mathbb{Z}$, 以及 $D_\nu D_\mu=D_{\mu+\nu}$ 当 $\mu,\nu\in\mathbb{Z}$.

定义 4.1 设 K 和 M 如上. 模 M 的一个 K-线性子空间序列 $(M_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}}$ 称为 M 上的一个滤, 如果

(i) $M_\mu\subseteq M_{\mu+1}$, $\mu\in\mathbb{Z}$, 以及存在 $\mu_0\in\mathbb{Z}$, 使得 $M_\mu=0$ 对一切 $\mu\leqslant\mu_0$ 成立.

(ii) $\bigcup\{M_\mu\mid\mu\in\mathbb{Z}\}=M$.

(iii) $D_\nu M_\mu\subseteq M_{\mu+\nu}$, $\mu\in\mathbb{Z},\nu\in\mathbb{N}$.

若每个 K-线性子空间 M_μ 有有限维数, 并存在 $\mu_0\in\mathbb{Z}$, 使得 $D_\nu M_\mu=M_{\mu+\nu}$ 对一切 $\mu\geqslant\mu_0$, $\nu\in\mathbb{N}$ 成立, 则称滤 $(M_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}}$ 为 M 上的良滤.

例 4.2 设 M 有生成元 $h_1,\ldots,h_q$. 作

$$M_\mu=D_\mu h_1+\ldots+D_\mu h_q,$$

$\mu\in\mathbb{Z}$, 则 $(M_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}}$ 是 M 上的良滤.

定义 4.3 设 M 和 N 是两个 D-模. 一个 K-模同态 $f:\ M \longrightarrow N$ 称为 Δ-σ- 同态 (或差分-微分同态), 如果 $f(\beta x)=\beta f(x)$, $x\in M$, $\beta\in\Delta\bigcup\sigma^*$. 满的 (单的或双的) Δ-σ-同态分别称为 Δ-σ-满同态 (单同态或同构).

取 $\mathbb{Z}^n$ 的正则轨道分解如例 2.2, 并定义 ΛE 上广义单项式序 "$\prec$" 如下 (见例 2.10):

设 $u=\delta_1^{k_1}\ldots\delta_m^{k_m}\alpha_1^{l_1}\ldots\alpha_n^{l_n}e_i$, $v=\delta_1^{r_1}\ldots\delta_m^{r_m}\alpha_1^{s_1}\ldots\alpha_n^{s_n}e_j$, 则

$$\begin{aligned} u\prec v \Longleftrightarrow\ & (\text{ord } u, e_i, k_1,\ldots,k_m,|l_1|,\ldots,|l_n|,l_1,\ldots,l_n)\\ & < (\text{ord } v, e_j, r_1,\ldots,r_m,|s_1|,\ldots,|s_n|,s_1,\ldots,s_n)\ \text{ in lexicographic order.}\end{aligned}$$

定理 4.4 设 M 有生成元 $h_1,\ldots,h_q$, F 是以 $e_1,\ldots,e_q$ 为基的自由 D 模, $\pi:\ F\longrightarrow M$ 是 F 到 M 的自然 Δ-σ-满同态 (即 $\pi(e_i)=h_i$, $i=1,\ldots,q$).

设 M_μ 如例 4.2 的 K-线性子空间. $G=\{g_1,\ldots,g_d\}$ 是 $N=\ker\pi$ 的相对于如上定义的广义单项式序 "$\prec$" 的 Gröbner 基, U_μ 是所有满足 ord $w\leqslant\mu$ 和 $w\neq\text{lt}(\lambda g_i)$, $\lambda\in\Lambda$ $(i=1,\ldots,d)$, 的项 $w\in\Lambda E$ 所成集合, 则 $\pi(U_\mu)$ 是 K-线性空间 M_μ 的基.

证明 首先证明 $\pi(U_\mu)$ 生成 K-线性空间 $M_\mu=D_\mu h_1+\ldots+D_\mu h_q$. 设有 $i\in\{1,\ldots,q\}$, $\lambda\in\Lambda$, ord $\lambda\leqslant\mu$, 使得 $\lambda h_i\in M_\mu$ 且 $\lambda h_i\notin\pi(U_\mu)$, 则 $\lambda e_i\notin U_\mu$, 从而有 $\lambda'\in\Lambda$, $g_j\in G$, 使得 $\lambda e_i=\text{lt}(\lambda'\ g_j)$. 故

$$\lambda'\ g_j=a_j\lambda e_i+\sum_\nu a_\nu\lambda_\nu e_\nu,$$

其中 $a_j\neq 0$, 且只有有限多个 $a_\nu\neq 0$. 进而, $\lambda_\nu e_\nu\prec\lambda e_i$ 且 ord $\lambda_\nu\leqslant\mu$. 因 $G\subseteq N=\ker(\pi)$, 有 $0=\pi(g_j)$ 及

$$0=\lambda'\pi(g_j)=\pi(\lambda'\ g_j)=a_j\pi(\lambda e_i)+\sum_\nu a_\nu\pi(\lambda_\nu e_\nu)=a_j\lambda h_i+\sum_\nu a_\nu\lambda_\nu h_\nu.$$

故而 λh_i 是一些形如 $\lambda_\nu h_\nu$ $(1\leqslant\nu\leqslant q)$ 的元素的有限线性组合 (系数在 K 中), 并满足 ord $\lambda_\nu\leqslant\mu$, $\lambda_\nu e_\nu\prec\lambda e_i$. 这样, 我们可在 λe_j $(\lambda\in\Lambda,\ 1\leqslant j\leqslant q)$ 上对 "$\prec$" 用归纳法得到: 每个 λh_i (ord $\lambda\leqslant\mu$, $1\leqslant i\leqslant q$) 是形如 $\pi(U_\mu)$ 的元素的有限线性组合 (系数在 K 中).

其次, 证明 $\pi(U_\mu)$ 在 K 上线性独立. 设 $u_1,\ldots,u_l\in U_\mu$, $a_1,\ldots,a_l\in K$, 使得 $\sum_{i=1}^l a_i\pi(u_i)=0$. 作 $h=\sum_{i=1}^l a_iu_i$, 则 $\pi(h)=0$ 且 $h\in N$. 因 $\text{lt}(h)=u_i\in\{u_1,\ldots,u_l\}$, 由 U_μ 的定义有 $\text{lt}(h)\in U_\mu$ 及 $\text{lt}(h)\neq\text{lt}(\lambda g_i)$, $\lambda\in\Lambda$, $i=1,\ldots,d$. 由于 G 是 N 的 Gröbner 基, 命题 3.11 (iii) 导出 $h=0$. 故 $a_1=\cdots=a_l=0$. 定理得证.

定义 4.5 l 个变元 $t_1,\ldots,t_l$ 的有理系数多项式 $f(t_1,\ldots,t_l)$ 称为 numerical 多项式, 如果存在 $(s_1,\ldots,s_l)\in\mathbb{Z}^l$, 使得对一切 $r_i\geqslant s_i$ $(1\leqslant i\leqslant l)$ 有 $f(r_1,\ldots,r_l)\in\mathbb{Z}$.

由 Levin[9] 证明的下列定理把 Kondrateva[17, 18] 关于 $\mathbb{N}^m$ 上 numerical 多项式的结果推广到 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 上.

定理 4.6 设 A 是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 的子集. 取 $\mathbb{Z}^n$ 的正则轨道分解如例 2.2. 设 $\trianglelefteq$ 是 $\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n$ 上的偏序: $(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)\trianglelefteq(r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_n)$ 当且仅当 $(l_1,\ldots,l_n)$ 与 $(s_1,\ldots,s_n)$ 在同一个轨道并满足

$$(r_1,\ldots,r_m,|s_1|,\ldots,|s_n|)\in\{(k_1,\ldots,k_m,|l_1|,\ldots,|l_n|)+\mathbb{N}^{m+n}\}.$$

令

$$W_A=\{w\in\mathbb{N}^m\times\mathbb{Z}^n\mid \text{不存在}\in A\text{ 使得 } a\trianglelefteq w\},$$

及

$$W_A[r,s]=\{(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)\in W_A \mid k_1+\ldots+k_m\leqslant r, |l_1|+\ldots+|l_n|\leqslant s\},$$

则存在满足下列条件的两变元 numerical 多项式 $\psi_A(t_1,t_2)$:

(i) $\psi_A(r,s)=\mathrm{Card}\ W_A[r,s]$ 对充分大的 $(r,s)\in\mathbb{N}^2$ 成立.

(ii) $\deg\ \psi_A\leqslant m+n$, $\deg_{t_1}\psi_A\leqslant m$, 且 $\deg_{t_2}\psi_A\leqslant n$.

(iii) 若 $A=\emptyset$, 则 $\deg\ \psi_A=m+n$. 此时

$$\psi_A(t_1,t_2)=\binom{t_1+m}{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}2^i\binom{n}{i}\binom{t_2+i}{i}.$$

(iv) $\psi_A(t_1,t_2)=0$ 当且仅当 $(0,\ldots,0)\in A$.

推论 4.7 设 A, $\trianglelefteq$ 及 W_A 如定理 4.6 所述. 令

$$W_A[\mu]=\{(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_n)\in W_A \mid k_1+\ldots+k_m+|l_1|+\ldots+|l_n|\leqslant \mu\},$$

则存在满足下列条件的 numerical 多项式 $\phi_A(t)$:

(i) $\phi_A(\mu)=\mathrm{Card}\ W_A[\mu]$ 对充分大的 $\mu\in\mathbb{N}$ 成立.

(ii) $\deg\ \phi_A\leqslant m+n$, 且若 $A=\emptyset$ 则 $\deg\ \phi_A=m+n$.

(iii) $\phi_A(t)=0$ 当且仅当 $(0,\ldots,0)\in A$.

定理 4.8 设 M 为有限生成 D-模, $(M_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}}$ 是 M 上的良滤, 则存在 numerical 多项式 $\phi(t)$, 使得 $\deg(\phi(t))\leqslant m+n$, 且 $\phi(\mu)=\dim_R M_\mu$ 对充分大的 $\mu\in\mathbb{N}$ 成立. $\phi(t)$ 有形式 $\phi(t)=\frac{2^n a}{(m+n)!}t^{m+n}+o(t^{m+n})$, $a\in\mathbb{Z}$. $o(t^{m+n})$ 表示次数小于 $m+n$ 的有理系数多项式. 整数 $d=\deg\phi(t)$, a 及 $\Delta^d\phi(t)$ 不依赖于模 M 的生成元组的选择 ($\Delta^d\phi(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的 t 次有限差分: $\Delta\phi(t)=\phi(t+1)-\phi(t)$, $\Delta^2\phi(t)=\Delta(\Delta\phi(t))$ 等).

证明 由 $(M_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}}$ 是 M 上的良滤知每个 M_μ 是有限生成 K-线性空间且 $D_\nu M_\mu=M_{\mu+\nu}$, $\mu\geqslant\mu_0$, $\nu\geqslant 0$. 设 $h_1,\ldots,h_q$ 是 K-线性空间 M_{μ_0} 的基, 则 M 作为左 D-模由 $h_1,\ldots,h_q$ 生成. 且 $M_\mu=\sum_{i=1}^q D_{\mu-\mu_0}h_i$, $\mu\geqslant\mu_0$. 不失一般性可设 $\mu_0=0$ (若 $\phi(t)$ 是对应于 $\mu_0=0$ 的具有所需性质的 numerical 多项式, 则 $\phi(t-\mu_0)$ 是对应于 $\mu_0\in\mathbb{Z}$ 的 numerical 多项式). 这样可设 $M=\sum_{i=1}^q Dh_i$ 及 $M_\mu=\sum_{i=1}^q D_\mu h_i$ 对所有 $\mu\in\mathbb{Z}$ 成立.

设 F 是以 $e_1,\ldots,e_q$ 为基的自由 D-模. 设 $\pi:\ F\longrightarrow M$, $N=\ker\pi$ 及 U_μ $(\mu\in\mathbb{N})$ 如定理 4.4. 再设 $\prec$, N 及 $G=\{g_1,\ldots,g_d\}$ 如定理 4.4 所述, 则对任何 $\mu\in\mathbb{N}$, $\pi(U_\mu)$ 是 K-线性空间 M_μ 的基. 在定理 4.4 中已证明 π 在 U_μ 的限制是一一对应映射, 故 $\dim_K M_\mu=\mathrm{Card}\ \pi(U_\mu)=\mathrm{Card}(U_\mu)$.

注意 $U_\mu=\{w\in\Lambda E \mid \mathrm{ord}\ w\leqslant\mu;\ w\neq\mathrm{lt}(\lambda g_i),\lambda\in\Lambda,g_i\in G\}$. 令 $V_i^{(j)}$ 为 $K[\Lambda_j]$-模 ${}_{K[\Lambda_j]}\langle\mathrm{lt}(\lambda g_i)\in\Lambda_j E \mid \lambda\in\Lambda\rangle$ 的有限生成元集. 设 $V=\bigcup_{i,j}V_i^{(j)}$, 则 $U_\mu=\{w\in\Lambda E \mid \mathrm{ord}\ w\leqslant\mu;$ 不存在 $v\in V$ 使得 $v\trianglelefteq w\}$.

设 $V_{e_i}=\{v\in V \mid v=\lambda e_i,\lambda\in\Lambda\}$ 及 $U_\mu^{(i)}=\{w\in\Lambda e_i \mid \mathrm{ord}\ w\leqslant\mu;$ 不存在 $v\in V_{e_i}$ 使得 $v\trianglelefteq w\}$, $i=1,\ldots,q$, 则 $\mathrm{Card}(U_\mu)=\sum_{i=1}^q\mathrm{Card}(U_\mu^{(i)})$.

由推论 4.7, 存在 numerical 多项式 $\phi_i(t)$, 使得 $\deg(\phi_i(t))\leqslant m+n$, 且 $\phi_i(\mu)=\mathrm{Card}(U_\mu^{(i)})$, $(i=1,\ldots,q)$, 对所有充分大的 $\mu\in\mathbb{N}$ 成立, 从而 $\phi(t)=\sum_{i=1}^q\phi_i(t)$ 满足 $\deg(\phi(t))\leqslant m+n$, 且 $\phi(\mu)=\mathrm{Card}(U_\mu)=\dim_R M_\mu$ 对所有充分大的 $\mu\in\mathbb{N}$ 成立.

定理的最后一个结论是维数多项式 $\phi(t)$ 的熟知性质 [13].

定义 4.9 定理 4.8 中的 numerical 多项式 $\phi(t)$ 称为模 M 的差分-微分维数多项式.

例 4.10 设 K 是差分-微分域, 其导子集 Δ 和自同构集 σ 分别由一个导子 δ 和一个自同构 α 构成. 设 D 是 K 上 Δ-σ-算子环. $M = Dh$ 是循环 D-模, 其生成元 h 满足定义方程

$$(\delta^a\alpha^b + \delta^a\alpha^{-b} + \delta^{a+b})h = 0.$$

换言之, M 同构于商模 F/N, 其中 F 是只有一个生成元 e 的自由 D-模, $N = D(\delta^a\alpha^b+\delta^a\alpha^{-b}+\delta^{a+b})e$ 是 F 的子模. 取 ΛE 上广义单项式序 $\prec$ 如定理 4.8, 则 $\{g = (\delta^a\alpha^b + \delta^a\alpha^{-b} + \delta^{a+b})e\}$ 是 N 的 Gröbner 基 (见例 3.12). 因 $\mathrm{lt}(g) = (\delta^{a+b})e$ 在 ΛE 的任意轨道中, 由引理 3.4 (ii) 知对任意 $\lambda \in \Lambda$ 有 $\mathrm{lt}(\lambda g) = \lambda(\delta^{a+b})e$. 故由定理 4.8,

$$\dim_K M_t = \mathrm{Card}(U_t) = \mathrm{Card}\{u \in \Lambda \mid \mathrm{ord}\ u \leqslant t; u \neq \lambda\delta^{a+b}, \lambda \in \Lambda\},$$

从而

$$\begin{aligned}\dim_K M_t &= \mathrm{Card}\{\delta^c\alpha^d \mid c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, c + |d| \leqslant t, (c, |d|) \notin \{(a+b, 0) + \mathbb{N}^2\}\}\\ &= \mathrm{Card}\{\delta^c\alpha^d \mid c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, c + |d| \leqslant t\}\\ &\quad - \mathrm{Card}\{\delta^c\alpha^d \mid c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, c + |d| \leqslant t - (a+b)\}\\ &= [(t+2)(t+1) - (t+1)] - [(t-a-b+2)(t-a-b+1) - (t-a-b+1)]\\ &= 2(a+b)t + (a+b)(2-a-b).\end{aligned}$$

例 4.11 设 M 如例 4.10. 但 ΛE 上的广义单项式序 $\prec$ 定义如下:

$$\delta^k\alpha^l e \prec \delta^r\alpha^s e \Longleftrightarrow (k + |l|, |l|, k, l) < (r + |s|, |s|, r, s) \ \text{ in lexicographic order.}$$

此时定理 4.4 和 4.8 仍成立. 记 $\{\delta^k\alpha^l \mid l \geqslant 0\}$ 为 Λ_1, $\{\delta^k\alpha^l \mid l \leqslant 0\}$ 为 Λ_2. 因为 $\mathrm{lt}(g) = \delta^a\alpha^b e \in \Lambda_1$ 及 $\mathrm{lt}(\alpha^{-1}g) = \delta^a\alpha^{-(b+1)}e \in \Lambda_2$, 故

$$\{\mathrm{lt}(\lambda g) \in \Lambda_1 \mid \lambda \in \Lambda\} = \Lambda_1\delta^a\alpha^b e, \qquad \{\mathrm{lt}(\eta g) \in \Lambda_2 \mid \eta \in \Lambda\} = \Lambda_2\delta^a\alpha^{-(b+1)}e.$$

从而

$$\begin{aligned}\dim_K M_t &= \mathrm{Card}\{\delta^c\alpha^d \mid c, d \in \mathbb{N}, c + d \leqslant t, (c, d) \notin \{(a, b) + \mathbb{N}^2\}\} +\\ &\quad + \mathrm{Card}\{\delta^c\alpha^d \mid c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, d < 0, c + |d| \leqslant t, (c, -d) \notin \{(a, b+1) + \mathbb{N}^2\}\}\\ &= \left[\frac{1}{2}(t+1)(t+2) - \frac{1}{2}(t-a-b+1)(t-a-b+2)\right]\\ &\quad + \left[\frac{1}{2}t(t+1) - \frac{1}{2}(t-a-b)(t-a-b+1)\right]\\ &= 2(a+b)t + (a+b)(2-a-b).\end{aligned}$$

致谢 作者对两位评审人的意见和建议表示真诚感谢.

参考文献

1 Buchberger B. Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory. In: Multidimensional Systems Theory: D. Reidel, 1985, 184–232

2 Galligo A. Some algorithmic questions on ideals of differential operators. *Springer Lec Notes Comp Sci*, **204**: 413–421 (1985)

3 Mora. Gröbner bases for non-commutative polynomial rings. *Springer Lec Notes Comp Sci*, **229**: 353–362 (1986)

4 Noumi M. Wronskima determinants and the Gröbner representation of linear differential equation. In: Algebraic Analysis. Boston: Academic Press, 1988, 549–569

5 Takayama N. Gröbner basis and the problem of contiguous relations. *Japan J Appl Math*, **6**: 147–160 (1989)

6 Oaku T, Shimoyama T. A Gröbner basis method for modules over rings of differential operators. *J Symb Comput*, **18**: 223–248 (1994)

7 Insa M, Pauer F. Gröbner bases in rings of differential operators. In: Gröbner Bases and Applications. New York: Cambridge University Press, 1998, 367–380

8 Pauer F, Unterkircher A. Gröbner bases for ideals in Laurent polynomial rings and their applications to systems of difference equations. *AAECC*, **9**: 271–291 (1999)

9 Levin A B. Reduced Gröbner bases, free difference-differential modules and difference-differential dimension polynomials. *J Symb Comput*, **30**: 357–382 (2000)

10 Kolchin E R. The notion of dimension in the theory of algebraic differential equations. *Bull Amer Math soc*, **70**: 570–573 (1964)

11 Johnson J. Kahler differentials and differential algebra in arbitrary characteristic. *Trans Amer Math Soc*, **192**: 201–208 (1974)

12 Levin A B, Mikhalev A V. Differential dimension polynomial and the strength of a system of differential equations. In: Computable Invariants in the Theory of Algebraic Systems. Collection of Papers: Novosibirsk, 1987, 58–66

13 Kondrateva M V, Levin A B, Mikhalev A V, et al. Differential and Difference Dimension Polynomials. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999

14 Levin A B. Characteristic polynomials of filtered difference modules and of difference field extensions. *Russ Math Surv*, **33**: 165–166 (1978)

15 Mikhalev A V, Pankratev E V. Computer Algebra. Computations in Differential and Difference Algebra. Moscow: Moscow State University. Press, 1989

16 Wu M. On solutions of linear functional systems and factorization of modules over Laurent-Ore algebras. Doctoral Thesis, Nice University, France, 2005

17 Kondrateva M V, Levin A B, Mikhalev A V, et al. Computation of dimension polynomials. *Intern J Algebra Comput*, **2**: 117–137 (1992)

18 Carra Ferro G. Differential Gröbner bases in one variable and in the partial case. Algorithms and software for symbolic analysis of nonlinear systems. *Math Comput Modelling*, **25**: 1–10 (1997)